Cours du 01.03.2021 MATIN

lundi, 1 mars 2021 10:19

Support du cours sur le site https://eswys.ch/hepia/
(exercices, notes du cours, polycopié)

Question :
Quel intérêt à prouver que $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$

C'est "trivial"….! En effet l'addition est commutative, donc ça doit être vrai !!!

ATTENTION, ici on définit un NOUVEL opérateur (surcharge d'opérateur) => ce n'est pas toujours vrai !!!

Analogie avec l'informatique :

operator + : (int, int) return int +(i, j) => i+j
operator + : (int, float) return float +(i, f) => i+partie_décimale(f)

Le contexte du code détermine QUEL opérateur sera utilisé.

Operator / : (int, int) => DIVISION ENTIERE !!! (3/2 = 1)
Operator / : (float, int) => 3f / 2 = ça peut être SOIT la division entière, soit la division "habituelle"…

Nous redéfinissions un NOUVEL opérateur +

$$+ : (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \Rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$$

C'est commutatif ! Mais si on définissait le "+" comme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{"+"} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 + y_1 \end{pmatrix}$$

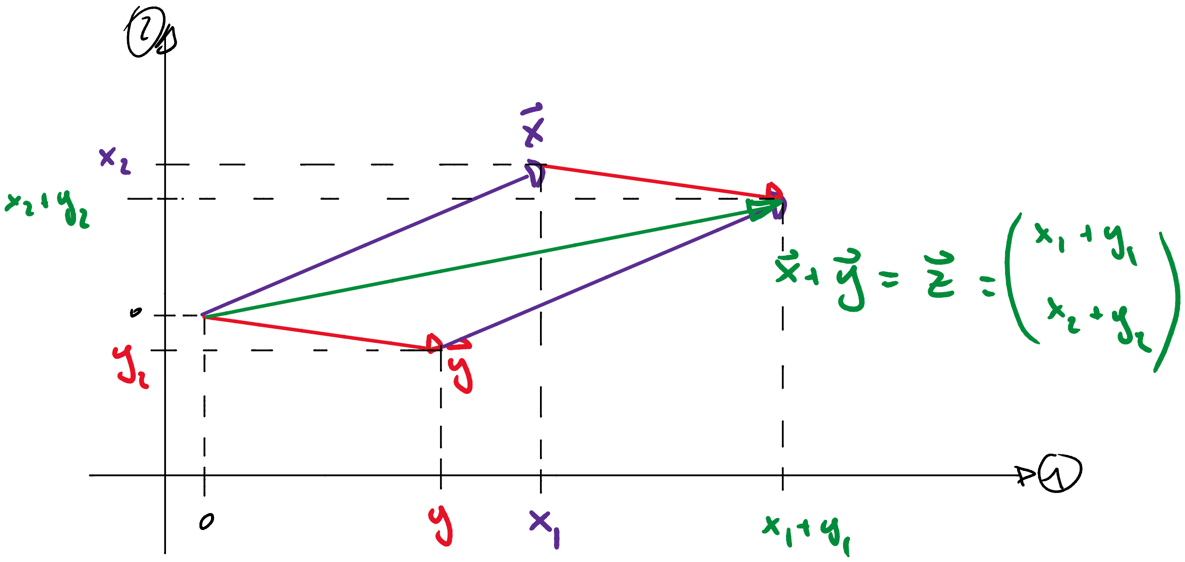
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{"+"} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3 \\ 2 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \text{"+"} \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3\\2+5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$$

$$\neq \quad \text{PAS COMMUTATIF !}$$

$$\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} \text{"+"} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5+2\\3+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$$

Interprétation géométrique de l'addition vectorielle



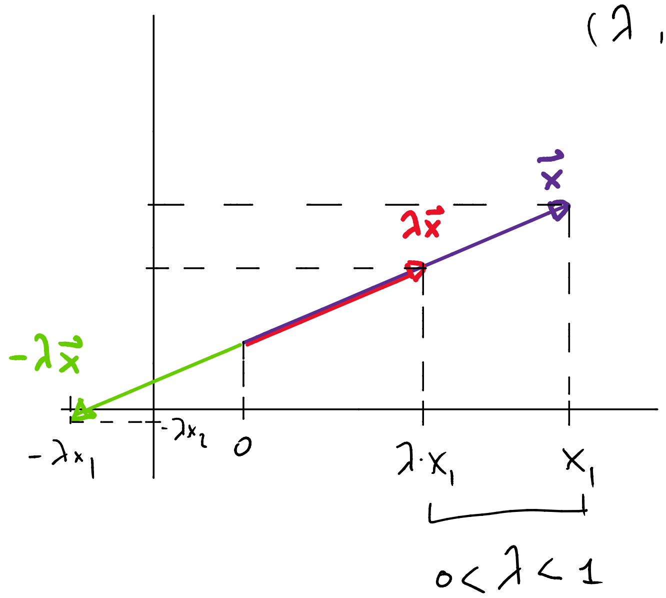
$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{z} = \begin{pmatrix}x_1 + y_1\\x_2 + y_2\end{pmatrix}$$

Multiplication par un scalaire :

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$

(scalaire, vecteur) $\longrightarrow$ vecteur

$(\lambda, \vec{x}) \longrightarrow \lambda \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda x_2\end{pmatrix}$



La multiplication par un scalaire d'un vecteur garde les propriétés connues

- Associative $\left((\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x})\right)$
- Commutatif $\lambda \cdot \mu \cdot \vec{x} = \mu \cdot \lambda \cdot \vec{x}$
- Distributif sur l'addition de vecteurs $\lambda(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$

$$(\lambda+\mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$$

"Soustraction" de deux vecteurs :

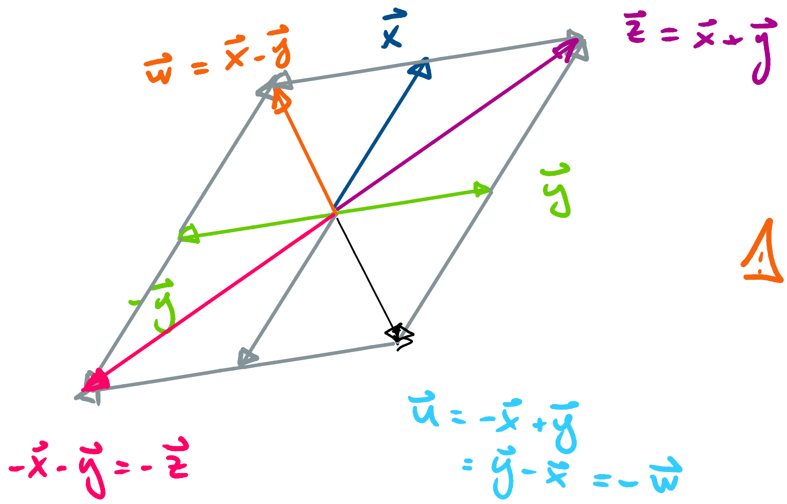
Dans le monde des scalaires, la soustraction :

$$a - b = a + (-b) = a + (-1) \cdot b$$

Avec les vecteurs c'est pareil :

$$\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-1) \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix}$$

⚠ PAS COMMUTATIF !



⚠ $\vec{w} \neq -\vec{z}$

Pour illustrer

$a + b = z$ $\qquad a - b = w$

$-(a+b) = -z$ $\qquad -(a-b) = -a + b = -w$

La soustraction des vecteurs est une combinaison de l'addition de

La soustraction des vecteurs est une combinaison de l'addition de vecteurs ET la multiplication par un scalaire ($\lambda = -1$).

Tout ce qui s'applique au vecteurs à 2 dimension dans $\mathbb{R}^2$
S'applique AUSSI aux vecteurs à N dimensions !

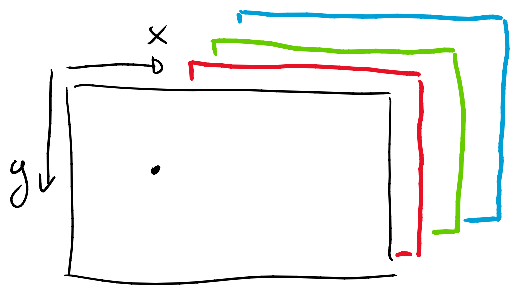
$$\vec{x} \in \mathbb{R}^N \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_N + y_N \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_N \end{pmatrix}$$

Applications à plus de 3 dimensions : VOTRE ECRAN !!

1 pixel est défini par :



$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ r \\ g \\ b \end{pmatrix} \text{ définir 1 couleur}$$

$x, y \in \mathbb{N} \ (0, \ldots, 1920)$

$r, g, b \in \{0, \ldots, 255\}$

Combinaison Linéaire :

Si ... $\in \mathbb{R}^2$ sont deux vecteurs et si λ ... sont deux

---

Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ sont deux vecteurs, et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont deux scalaires, alors on définit la combinaison linéaire des deux vecteurs comme

$$\vec{z} = \lambda \vec{x} + \mu \vec{y}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

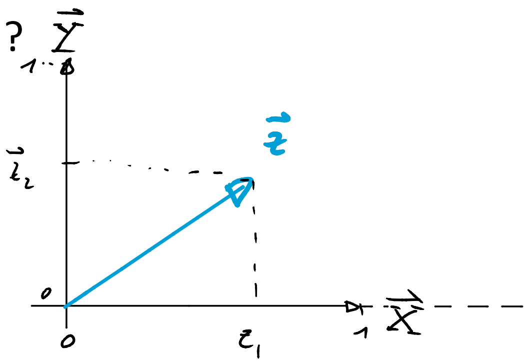
A N dimensions, on écrit les scalaires avec un indice $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$

On écrit les vecteurs avec un indice $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N$

$$\vec{z} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \ldots + \lambda_N \vec{x}_N = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \vec{x}_i$$

COMBINAISON LINEAIRE !!!

A quoi cela sert-il ?



$\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont les vecteurs directeur du système d'axes x-y !

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \lambda \vec{X} + \mu \vec{Y}$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad = z_1 \cdot \vec{X} + z_2 \vec{Y}$$

Avec mes deux vecteurs "directeurs", on peut écrire n'importe quel vecteur du plan comme une COMBINAISON LINEAIRE de ces deux vecteurs directeurs !!!!

Définition : On dit que deux vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont ***__Linéairement dépendants__***, ***__liés__*** ou ***__colinéaires__*** si il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{\vec{x} = \lambda \cdot \vec{y}}$$

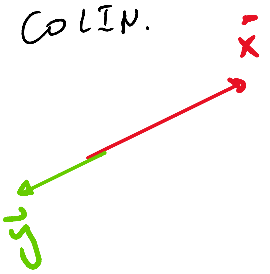
$\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont
- colinéaires
- dépendant linéaire.
- liés

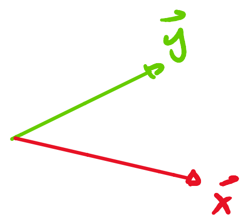
Si les vecteurs ne sont PAS colinéaires, alors on dit qu'ils sont

- NON-colinéaires (vs colinéaires)
- Linéairement Indépendants (vs lin. Dépendants)
- LIBRES (vs liés)

Que signifie les faite que 2 vecteurs soient colinéaires ?
Réponse : Ils ont même DIRECTIONS (pas forcément le même sens ni la même longueur).

COLIN.





NON- COLIN.